УДК 519.6
С 50

С единой точки зрения рассмотрены методы решения некоторых классов одномерных интегральных уравнений типа потенциала, в том числе методы нахождения приближенных решений. Освещены вопросы существования и единственности решения уравнений, сходимости приближенных решений к точным. Указаны функциональные пространства для рассматриваемых уравнений.

Методические указания выполнены на кафедре "Высшая математика" и предназначены для студентов специальности "Прикладная математика".

Автор Ю.Г. Смирнов

Р е ц е н з е н т А.С. Ильинский, д–р физ.–мат. наук, проф. кафедры "Математическая физика" Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

1. Пространства функций и многочлены Чебышева

Многочлены Чебышева 1–го и 2–го рода, обозначаемые соответственно T_n и U_n, определяются посредством следующих формул:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x; \tag{1}$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, ...; \tag{2}$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x; \tag{3}$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots . \tag{4}$$

Рекуррентные формулы (2) и (4) одинаковы, а различие между многочленами 1–го и 2–го рода является следствием начальных условий (1) и (3).

Выпишем несколько первых многочленов Чебышева. Из формул (1)–(4) находим

$$\begin{array}{rl} T_0(x) = & 1, \\ T_1(x) = & x, \\ T_2(x) = & 2x^2 - 1, \\ T_3(x) = & 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) = & 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) = & 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) = & 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1; \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{rl} U_0(x) = & 1, \\ U_1(x) = & 2x, \\ U_2(x) = & 4x^2 - 1, \\ U_3(x) = & 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) = & 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ U_5(x) = & 32x^5 - 32x^3 + 6x, \\ U_6(x) = & 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1. \end{array} \tag{6}$$

Из этих формул следует, что T_n и U_n являются многочленами n–й степени. Рассмотрим кратко основные свойства многочленов Чебышева (подробные сведения содержатся в монографиях [1 – 5], см. также справочники [6, 7]).

Если $|x| \leq 1$, то имеют место удобные представления

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, ...; \tag{7}$$

$$U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \sin\left((n+1) \arccos x\right), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{8}$$

При $x = \pm 1$ в формуле (8) следует взять предел. Связь между многочленами 1–го и 2–го рода показывает формула

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{9}$$

Многочлены T_n, U_n являются четными функциями при четных n и нечетными — при нечетных n:

$$\begin{array}{rl} T_n(-x) = & (-1)^n \, T_n(x), \\ U_n(-x) = & (-1)^n \, U_n(x). \end{array} \tag{10}$$

Одним из важных свойств этих многочленов является их *ортогональность* на отрезке $[-1,1]$ с некоторой весовой функцией (*весом*). Это свойство выражается формулами:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi/2, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases}; \tag{11}$$

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi/2, & n = m \end{cases}. \tag{12}$$

Таким образом, многочлены 1–го рода ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$, а многочлены 2–го рода — с весом $\sqrt{1-x^2}$.

Формулы (11), (12) можно использовать для разложения некоторой известной функции в ряд Фурье по многочленам Чебышева (в *ряд Фурье – Чебышева*), а именно:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x), \quad x \in [-1,1] \tag{13}$$

или

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{14}$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0,1,...; \tag{15}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,\ldots . \tag{16}$$

Отметим, что функция $f(x)$ может быть комплекснозначной, тогда коэффициенты a_n и b_n — комплексные числа. Вот некоторые примеры разложения функций в ряды Фурье – Чебышева:

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}T_{2n}(x), \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}T_{2n+1}(x), \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\ln(1+x) = -\ln 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}T_n(x), \quad -1 < x \leq 1.$$

Аналогичные формулы можно получить, используя многочлены U_n. В первом примере функция является четной, поэтому в разложении остаются только четные коэффициенты, а нечетные равны нулю; во втором примере наоборот, функция нечетная и сохраняются только нечетные коэффициенты. Так как $|T_n(x)| \leq 1$, то первый и второй ряды сходятся при всех $x \in [-1,1]$ равномерно на этом отрезке. Иначе обстоит дело с третьим рядом. Этот ряд сходится при всех значениях $-1 < x \leq 1$, однако при $x = -1$ расходится. И это естественно, поскольку функция $\ln(x+1)$ в точке $x = -1$ обращается в бесконечность.

Для описания сходимости рядов Фурье – Чебышева введем пространства функций, *квадратично-суммируемых на интервале* $(-1,1)$ *с весом* $1/\sqrt{1-x^2}$ или $\sqrt{1-x^2}$. Будем писать $f \in L_2^{(1)}$, если интеграл

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{17}$$

существует, и $f \in L_2^{(2)}$, если сходится интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x. \tag{18}$$

Числа, определяемые интегралами (17) и (18), являются квадратами норм функции $f(x)$ в пространствах $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$ и будут обозначаться через $\|f\|_1^2$ и $\|f\|_2^2$ соответственно. Таким образом,

$$L_2^{(1)} := \{f(x) : \|f\|_1^2 := \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} < \infty\},$$

$$L_2^{(2)} := \{f(x) : \|f\|_2^2 := \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Пространства $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$ являются гильбертовыми со скалярными произведениями

$$(f,g)_1 = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(f,g)_2 = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Нам понадобятся еще два пространства функций:

$$\tilde{W}_2^1 := \{f(x) :\ f \in L_2^{(1)},\ f' \in L_2^{(2)}\},$$

$$\widehat{W}_2^1 := \{f(x) :\ f \in L_2^{(1)},\ f'(x)\sqrt{1-x^2} \in L_2^{(2)}\}.$$

Это тоже гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$(f,g)_{\tilde{W}_2^1} = \int\limits_{-1}^{1} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-1}^{1} \overline{g(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$(f,g)_{\widehat{W}_2^1} = \int\limits_{-1}^{1} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-1}^{1} \overline{g(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\, (1-x^2)^{3/2}\, \mathrm{d}x$$

и нормами

$$\|f\|_{\tilde{W}_2^1}^2 = \left| \int\limits_{-1}^{1} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \right|^2 + \int\limits_{-1}^{1} |f'(x)|^2 \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^1}^2 = \left| \int\limits_{-1}^{1} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \right|^2 + \int\limits_{-1}^{1} |f'(x)|^2\, (1-x^2)^{3/2}\, \mathrm{d}x.$$

Если функция $f(x)$ разложена в ряд (13) Фурье – Чебышева (или (14)) и принадлежит $L_2^{(1)}$ ($L_2^{(2)}$), то этот ряд всегда сходится *в среднем (квадратичном) с весом*, то есть $\|f - S_N\|_1 \to 0$ ($\|f - S_N\|_2 \to 0$) при $N \to \infty$, где S_N — частичная сумма этого ряда. Чем "лучше" функция $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$, тем быстрее сходится ряд к этой функции. Конкретно, если $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на $[-1,1]$, то

$$\left| f(x) - \frac{a_0}{2} T_0(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x) \right| \le \frac{C \ln N}{N^p}, \quad x \in [-1,1], \tag{19}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от N.

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет p непрерывных производных на отрезке $[-1,1]$, $p \geq 2$, то

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} b_n U_n(x) \right| \leq \frac{C}{N^{p-3/2}}, \quad x \in [-1,1]. \tag{20}$$

В дальнейшем понадобятся три формулы, связанные с многочленами Чебышева:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-y} T_n(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi U_{n-1}(y), \quad -1 < y < 1, \quad n \geq 1; \tag{21}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-y} U_{n-1}(x) \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\pi T_n(y), \quad -1 < y < 1, \quad n \geq 1; \tag{22}$$

$$\int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|x-y|} T_n(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi \ln 2, & n = 0; \\ \pi\, T_n(y)/n, & n \geq 1. \end{cases} \tag{23}$$

Интегралы, стоящие в левых частях формул (21) и (22), понимаются в смысле главного значения по Коши (см. подробнее [8, 9]). В формуле (23) слева стоит обычный сходящийся несобственный интеграл.

Доказательства приведенных выше утверждений, оценок, формул имеются в [1–4].

2. Решение логарифмических уравнений

Задача дифракции акустической волны на тонком, бесконечно протяженном, "мягком" экране, а также задача дифракции E–поляризованной электромагнитной волны на металлической, бесконечно протяженной, тонкой ленте сводятся к решению интегральных уравнений с *логарифмической особенностью ядра*:

$$L\varphi := \int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|x-y|}\, \varphi(x)\, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = f(y), \quad -1 < y < 1 \tag{24}$$

или

$$(L+K)\varphi := \int_{-1}^{1} (\ln \frac{1}{|x-y|} + K(x,y))\, \varphi(x)\, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = f(y), \quad -1 < y < 1. \tag{25}$$

В уравнениях (24) и (25) $\varphi(x)$ — неизвестная функция, которую требуется найти; $f(y)$ — известная функция (правая часть), описывающая распределение падающего поля (волны) на экране или ленте. Функция $\ln(1/|x-y|)$ в уравнении (24) или $\ln(1/|x-y|) + K(x,y)$ в уравнении (25) называется ядром интегрального уравнения. Эта функция обращается в бесконечность при $x = y$ или, как говорят, имеет *особенность* при $x = y$. Поэтому уравнения (24) и (25) называют уравнениями с логарифмической особенностью ядра. $K(x,y)$ — некоторая известная функция, не имеющая особенности при $x = y$ (подробнее об условиях, налагаемых на $K(x,y)$, см. в [10]). В уравнениях (24) и (25) явно выделена весовая функция $1/\sqrt{1-x^2}$, характеризующая поведение решения вблизи точек -1 и $+1$. Линейные операторы L и $L+K$ определяются посредством левых частей уравнений (24) и (25).

Уравнение (24) является частным случаем уравнения (25) при $K(x,y) \equiv 0$ и может быть решено аналитически. Ниже оно используется для иллюстрации приближенного метода решения этих уравнений. Предположим, что функция $f(y) \in \tilde{W}_2^1$ (для простоты можно считать, что f

— непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1,1]$), и будем искать решение $\varphi(x)$ в пространстве функций $L_2^{(1)}$. Таким образом, L и $L+K$ рассматриваются как ограниченные операторы в пространствах $L: L_2^{(1)} \to \tilde{W}_2^1$, $L+K: L_2^{(1)} \to \tilde{W}_2^1$. Если функция $K(x,y)$ достаточно гладкая, то оператор K будет компактным в указанных пространствах.

Метод решения уравнения (24) состоит в следующем. Приближенное решение $\varphi_N(x)$ уравнения (24) ищем в виде

$$\varphi_N(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x), \tag{26}$$

где a_n — неизвестные коэффициенты. Разложим функцию $f(y)$ в ряд Фурье-Чебышева и запишем

$$f_N(y) = \frac{f_0}{2}T_0(y) + \sum_{n=1}^{N} f_n T_n(y), \tag{27}$$

где коэффициенты f_n известны и вычисляются по формуле (15). Подставим выражения (26) и (27) в уравнение (24), получим по формуле (23)

$$\frac{a_0}{2}\ln 2T_0(y) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} a_n T_n(y) = \frac{f_0}{2}T_0(y) + \sum_{n=1}^{N} f_n T_n(y). \tag{28}$$

Теперь можно приравнять коэффициенты при одинаковых $T_n(y)$:

$$\frac{a_0}{2}\ln 2 = \frac{f_0}{2}, \quad \frac{1}{n}a_n = f_n,$$

откуда находим неизвестные коэффициенты a_n

$$a_0 = \frac{f_0}{\ln 2}, \quad a_n = nf_n$$

и приближенное решение

$$\varphi_N(x) = \frac{f_0}{2\ln 2}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N} f_n T_n(x). \tag{29}$$

Точное решение уравнения (24) получается в виде ряда

$$\varphi(x) = \frac{f_0}{2\ln 2}T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} nf_n T_n(x). \tag{30}$$

Иногда ряд (30) удается просуммировать и получить таким образом аналитическое решение задачи. Приближенное решение $\varphi_N(x)$ уравнения (24) сходится к точному $\varphi(x)$ при $N \to \infty$ в среднем (по норме пространства $L_2^{(1)}$).

В случае общего уравнения (25) следует предварительно представить функцию $K(x,y)$ приближенно в виде частичной суммы двойного ряда Фурье – Чебышева (26)

$$K(x,y) \approx K_N(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} k_{ij}T_i(x)T_j(y), \tag{31}$$

а затем повторить указанную выше процедуру нахождения приближенного решения уравнения. Подробное обоснование метода имеется в [10].

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-1}^{1} (\ln\frac{1}{|x-y|} + xy)\,\varphi(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = y + \sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1.$$

В соответствии с приближенным методом полагаем

$$\varphi_N(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x)$$

и находим

$$y + \sqrt{1-y^2} = \frac{2}{\pi} T_0(y) + T_1(y) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_{2k}(y)}{4k^2-1},$$

$$K(x,y) = T_1(x) T_1(y).$$

Тогда, подставляя в уравнение эти выражения, получаем

$$\frac{a_0}{2} \ln 2 T_0(y) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} T_n(y) + \frac{\pi}{2} a_1 T_1(y) = \frac{2}{\pi} T_0(y) + T_1(y) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{T_{2k}(y)}{4k^2-1},$$

где $[\frac{N}{2}]$ обозначает целую часть числа, откуда находим, приравнивая коэффициенты при $T_n(y)$ в левой и правой частях уравнения,

$$a_0 = \frac{4}{\pi \ln 2}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = -\frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2-1}, \quad n \geq 1.$$

Приближенное решение имеет вид

$$\varphi_N(x) = \frac{4}{\pi \ln 2} + \frac{2}{\pi} x - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{[N/2]} \frac{n}{4n^2-1} T_{2n}(x),$$

точное —

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi \ln 2} + \frac{2}{\pi} x - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} T_{2n}(x).$$

Последний ряд сходится в среднем (по норме пространства $L_2^{(1)}$), а сама функция $\varphi \in L_2^{(1)}$.

В общем случае для вычисления интегралов в коэффициентах разложения правой части в ряд Фурье – Чебышева, а также для нахождения неизвестных коэффициентов a_n из системы линейных алгебраических уравнений следует использовать ЭВМ, привлекая для этого соответствующие численные методы (см., например, [11]).

3. Решение сингулярных уравнений

Рассмотрим два типа *сингулярных интегральных уравнений*, к которым приводят, например, задачи определения плотности продольной и поперечной составляющих поверхностного тока на бесконечно протяженном, тонком проводнике конечной ширины:

$$S_1\varphi := \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-y} \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = f(y), \quad -1 < y < 1; \tag{32}$$

$$(S_1 + K_1)\varphi = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x-y} + K_1(x,y) \right) \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = f(y), \quad -1 < y < 1; \tag{33}$$

$$S_2\varphi := \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-y} \varphi(x) \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = f(y), \quad -1 < y < 1; \tag{34}$$

$$(S_2+K_2)\varphi := \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x-y} + K_2(x,y)\right) \varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = f(y), \quad -1<y<1. \tag{35}$$

Как и в п.2, уравнения (32) и (34) являются частными случаями уравнений (33) и могут быть решены аналитически. Уравнения (32), (33) отличаются от уравнений (34), (35) только весовой функцией, выбор которой обычно осуществляется из физических соображений. Операторы S_1 и S_1+K_1 рассматриваются как линейные ограниченные операторы в пространствах $S_1 : L_2^{(1)} \to L_2^{(2)}$, $S_1+K_1 : L_2^{(1)} \to L_2^{(2)}$. Операторы S_2 и S_2+K_2 рассматриваются как линейные ограниченные операторы в пространствах $S_2 : L_2^{(2)} \to L_2^{(1)}$, $S_2+K_2 : L_2^{(2)} \to L_2^{(1)}$. При достаточно гладких функциях $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ операторы K_1 и K_2 будут компактными в соответствующих пространствах.

Будем искать приближенное решение $\varphi_N(x)$ в виде разложения по многочленам Чебышева с неизвестными коэффициентами. Проанализируем формулы (21), (22). Из этих формул видно, что для решения уравнений (32), (33) функцию φ следует разложить по многочленам Чебышева 1–го рода, а функцию f — по многочленам 2–го рода. Для решения уравнений (34), (35) наоборот: неизвестную функцию φ разложить по многочленам Чебышева 2–го рода, а правую часть f — по многочленам 1–го рода.

Решим уравнение (32). Пусть $f \in L_2^{(2)}$, ищем $\varphi \in L_2^{(1)}$:

$$\varphi_N(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + \sum_{n=1}^{N} a_n T_n(x); \tag{36}$$

$$f_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k U_k(y), \tag{37}$$

где коэффициенты f_k вычисляются по формуле (16). Подставляя выражения (36) и (37) в уравнение (32) и применяя формулу (21), получим

$$\pi \sum_{n=1}^{N} a_n U_{n-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k U_k(y). \tag{38}$$

Коэффициент a_0 пропадает, поскольку по известной формуле (см. [4])

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x-y}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad -1<y<1. \tag{39}$$

Из уравнения (38) находим, приравнивая коэффициенты при $U_n(y)$ в левой и правой частях формулы, $a_n = f_{n-1}/\pi$, $\quad n \geq 1$. Коэффициент a_0 остается неопределенным. Таким образом, решение уравнения (32) зависит от одной произвольной постоянной $C = a_0/2$:
приближенное решение —

$$\varphi_N(x) = C + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} f_{n-1}\, T_n(x); \tag{40}$$

точное решение —

$$\varphi(x) = C + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} T_n(x). \tag{41}$$

Последний ряд сходится в среднем (по норме пространства $L_2^{(1)}$).

Для того, чтобы получить единственное решение уравнения (32) (определить постоянную C), необходимо задать дополнительное условие, которому должна удовлетворять функция $\varphi(x)$.

Например, в задаче об определении плотности продольного поверхностного тока на проводнике известно, что

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \tag{42}$$

Тогда, используя свойство (11) ортогональности функции $T_0(x) \equiv 1$ всем функциям $T_n(x)$, $n \geq 1$, с помощью формулы (41) вычисляем

$$C = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Уравнение (33) решается аналогично, но предварительно функцию $K_1(x,y)$ следует приближенно представить в виде частичной суммы ряда Фурье – Чебышева (см. [3])

$$K_1(x,y) \approx K_N^{(1)}(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N-1} k_{ij}^{(1)} T_i(x) U_j(y), \tag{43}$$

а затем применить метод, изложенный выше. Если $K_1(x,y)$ — многочлен по x и y, то представление (43) будет точным и его можно получить элементарным способом, комбинируя формулы (1)–(6).

Пример 2. Решим сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x-y} + x^2 y^3 \right) \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = y, \quad -1 < y < 1$$

с дополнительным условием (42). Будем искать приближенное решение в виде

$$\varphi_N(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + \sum_{n-1}^{N} a_n T_n(x).$$

Правая часть

$$y = \frac{1}{2} U_1(y).$$

Для $K_1(x,y)$, используя формулы (6), находим

$$K_1(x,y) = \left(\frac{1}{2} T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x) \right) \left(\frac{1}{4} U_1(y) + \frac{1}{8} U_3(y) \right).$$

Подставим эти выражения в уравнение. Применяя формулу (21) и соотношения ортогональности (11), будем иметь

$$\pi \sum_{n=1}^{N} a_n U_{n-1}(y) + \left(\frac{1}{4} U_1(y) + \frac{1}{8} U_3(y) \right) \frac{\pi (a_0 + a_2)}{4} = \frac{1}{2} U_1(y),$$

откуда получаем, приравнивая коэффициенты в левой и правой частях формулы при $U_n(y)$,

$$\pi a_1 = 0, \quad \pi a_2 + \frac{\pi (a_0 + a_2)}{16} = \frac{1}{2}, \quad \pi a_3 = 0,$$

$$\pi a_4 + \frac{\pi (a_0 + a_2)}{32} = 0; \quad \pi a_n = 0, \quad n \geq 5.$$

Из этих соотношений находим

$$a_0 = C,\ a_2 = \frac{1}{17}(\frac{8}{\pi} - C),\ a_4 = \frac{1}{68}(2C - \frac{1}{\pi}), \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, 2, 4,$$

где C — произвольная постоянная.

Для определения единственного решения, удовлетворяющего условию (42), вычисляем

$$C = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_2 = \frac{8}{17\pi}, \quad a_4 = -\frac{1}{68\pi}.$$

Окончательно решение принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{8}{17\pi}T_2(x) - \frac{1}{68\pi}T_4(x)$$

или

$$\varphi(x) = -\frac{2}{17\pi}x^4 + \frac{18}{17\pi}x^2 - \frac{33}{68\pi},$$

причем приближенное решение $\varphi_N(x) = \varphi(x)$ при $N \geq 4$. Таким образом, в заданном случае удалось получить точное аналитическое решение в виде многочлена.

Перейдем к уравнениям (34) и (35). Рассмотрим метод решения уравнения (34). Приближенное решение будем искать в виде

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n U_n(x). \tag{44}$$

Правую часть разложим по многочленам Чебышева 1–го рода

$$f_N(y) = \frac{f_0}{2}T_0(y) + \sum_{k=1}^{N} f_k T_k(y), \tag{45}$$

где коэффициенты f_k вычисляются по формуле (15). Подставим выражения (44) и (45) в уравнение (34). Применяя формулу (22), получим

$$-\pi \sum_{n=0}^{N-1} b_n T_{n+1}(y) = \frac{f_0}{2}T_0(y) + \sum_{k=1}^{N} f_k T_k(y). \tag{46}$$

Из уравнения (46) определяются неизвестные коэффициенты b_n

$$b_n = -\frac{1}{\pi}f_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Равенство (46) будет иметь место только в том случае, если $f_0 = 0$. Следовательно, решение уравнения (34) существует не при любой правой части $f(y)$, а лишь тогда, когда для функции $f(y)$ выполняется условие

$$\int_{-1}^{1} f(y)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \tag{47}$$

которое эквивалентно требованию $f_0 = 0$ (см. формулу (15) при $n = 0$). В отличие от условия (42), для уравнения (32) дополнительное условие (47) при решении уравнения (34) накладывается на известную функцию $f(y)$. В результате получается единственное решение уравнения (34):

приближенное решение —

$$\varphi_N(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1} f_{n+1}U_n(x), \tag{48}$$

точное решение —

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}U_n(x). \tag{49}$$

При решении уравнений (34), (35) предполагаем, что правая часть $f \in L_2^{(1)}$, а $\varphi \in L_2^{(2)}$. Ряд (49) сходится в среднем по норме пространства $L_2^{(2)}$.

Метод решения уравнения (35) аналогичен методу решения уравнения (34). Отличие заключается в том, что функцию $K_2(x,y)$ приближенно заменяем частичной суммой двойного ряда Фурье – Чебышева (см. [3]),

$$K_2(x,y) \approx K_N^{(2)}(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N} k_{ij}^{(2)}U_i(x)T_j(y). \tag{50}$$

Подстановка выражений (44), (45), (50) в уравнение (35) приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов b_n. Как и для уравнения (34), решение уравнения (35) существует не при любой правой части $f(y)$.

Рассматриваемый метод позволяет не только решать уравнения (34) и (35), но прежде всего определять, существует решение у данного интегрального уравнения или нет. Приведем пример уравнения вида (35), которое не имеет решения.

Пример 3. Будем искать решение сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-y}+\sqrt{1-y^2}\right)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 1, \quad -1<y<1; \quad \varphi \in L_2^{(2)}.$$

Как и при решении уравнения (34), ищем приближенное решение в виде

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_nU_n(x).$$

Функцию $K_2(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ приближенно заменяем функцией

$$K_N^{(2)}(x,y) = \frac{2}{\pi}T_0(y) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{[N/2]}\frac{1}{4k^2-1}T_{2k}(y).$$

Правая часть данного уравнения $1 = T_0(y)$. Подставив полученные выражения в уравнение, находим

$$-\pi\sum_{n=0}^{N-1} b_nT_{n+1}(y) + \left(T_0(y) - 2\sum_{k=1}^{[N/2]}\frac{1}{4k^2-1}T_{2k}(y)\right)b_0 = T_0(y).$$

Приравнивая коэффициенты при $T_0(y)$ в левой и правой частях формулы, находим, что $b_0 = 1$. Далее, приравнивая коэффициенты при $T_1(y)$, имеем $-\pi b_0 = 0$, откуда $b_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что данное уравнение не имеет решения. Отметим, что это обстоятельство не связано с тем, что разыскивалось приближенное решение $\varphi_N(x)$, а не точное $\varphi(x)$. Можно было бы рассматривать не конечные суммы, а бесконечные ряды (при $N=\infty$) и получить то же самое противоречие.

Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $f(y)$, чтобы рассматриваемое уравнение с правой частью $f(y)$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-y}+\sqrt{1-y^2}\right)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = f(y), \quad -1<y<1$$

имело решение. Для этого вместо единицы в правую часть уравнения следует подставить разложение

$$f_N(y) = \frac{f_0}{2} T_0(y) + \sum_{n=1}^{N} f_n T_n(y).$$

Тогда в результате обычной процедуры приравнивания коэффициентов определяем

$$b_0 = \frac{f_0}{2}, \quad b_0 = -\frac{1}{\pi} f_1,$$

$$b_{2k-1} = -\frac{1}{\pi}\left(f_{2k} + \frac{2}{4k^2-1} b_0\right),$$

$$b_{2k} = -\frac{1}{\pi} f_{2k+1}; \quad k \geq 1.$$

Значит, для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{f_0}{2} = -\frac{1}{\pi} f_1,$$

или, используя формулу (15), в другой записи

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} y\, f(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

В этом случае коэффициенты b_n определяются однозначно и, следовательно, решение уравнения единственно.

4. Решение гиперсингулярных уравнений

К гиперсингулярным уравнениям приводят многие задачи математической физики. Это, например, задача дифракции акустической волны на тонком, бесконечно протяженном, "жестком" экране и задача дифракции H–поляризованной электромагнитной волны на металлической, бесконечно протяженной тонкой ленте.

Рассмотрим *гиперсингулярные уравнения*

$$H\varphi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-y}\,\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = f(y), \quad -1 < y < 1, \tag{51}$$

$$(H+K)\varphi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-y} + K(x,y)\right)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = f(y), \quad -1 < y < 1. \tag{52}$$

Операцию дифференцирования нельзя внести под знак интеграла, так как получится расходящийся несобственный интеграл. Поэтому уравнения (51) и (52) являются интегродифференциальными (а не просто интегральными, как в гл. 2 и 3) и их называют гиперсингулярными. Линейные операторы H, $H+K$ рассматриваются в пространствах $H : \widehat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$, $H+K : \widehat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$ и являются ограниченными. Если функция $K(x,y)$ достаточно гладкая, то оператор K будет компактным.

Обратимся к решению уравнения (51). Формулы (22) и (9) показывают, что разложение неизвестной функции $\varphi_N(x)$ приближенного решения следует искать в виде

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n U_n(x). \tag{53}$$

Правую часть также надо разложить по многочленам Чебышева 2–го рода

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n U_n(y), \tag{54}$$

где коэффициенты f_n определяются по формулам (16).

Подставим эти выражения в уравнение (51). Применяя формулы (22) и (9), получим

$$-\pi \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\, b_n U_n(y) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n U_n(y). \tag{55}$$

Отсюда находим, приравнивая коэффициенты при $U_n(y)$ в левой и правой частях формулы (55),

$$b_n = -\frac{1}{\pi(n+1)} f_n, \quad n \geq 0.$$

В результате имеем единственное приближенное решение

$$\varphi_N(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} f_n U_n(x). \tag{56}$$

Точное решение получается в виде ряда

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_n U_n(x). \tag{57}$$

Если функция $f(y) \in L_2^{(2)}$, то функция $\sqrt{1-x^2}\varphi\prime(x) \in L_2^{(2)}$. Отметим, что решение гиперсингулярного уравнения (51) существует и единственно при любой правой части $f \in L_2^{(2)}$.

Уравнение (52) можно решать тем же способом, что и уравнение (51). Для этого функцию $K(x,y)$ приближенно заменим частичной суммой двойного ряда Фурье – Чебышева (см. [3])

$$K(x,y) = \sum_{i=o}^{N-1} \sum_{j=0}^{N} k_{ij} U_i(x) T_j(y). \tag{58}$$

При подстановке выражения (58) в уравнение (52) производная $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ преобразует многочлены Чебышева 1–го рода в многочлены 2–го рода по формуле (9), и дальше процедура решения уравнения (52) аналогична решению уравнения (51).

Пример 4. Решим гиперсингулярное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x-y} + xy^2 \right) \varphi(x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = y^2, \quad -1 < y < 1.$$

Ищем приближенное решение уравнения в виде разложения по многочленам Чебышева 2–го рода

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n U_n(x)$$

с неизвестными коэффициентами b_n. С помощью формул (5) и (6) находим

$$-\pi \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) b_n U_n(y) + \frac{\pi}{4} b_1 U_1(y) = \frac{1}{4} U_0(y) + \frac{1}{4} U_2(y).$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях формулы при многочленах $U_n(y)$, определим неизвестные коэффициенты b_n и получим решение $\varphi_N(x)$

$$b_0 = -\frac{1}{4\pi}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{12\pi}, \quad b_n = 0, \quad n \geq 3;$$

$$\varphi_N(x) = -\frac{1}{4\pi}U_0(x) - \frac{4}{7\pi}U_1(x) - \frac{1}{12\pi}U_2(x) = -\frac{1}{3\pi}x^2 - \frac{8}{7\pi}x - \frac{1}{6\pi}.$$

Так как $b_n = 0$ при $n \geq 3$, то приближенное решение $\varphi_N(x)$ совпадает с точным $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \varphi_N(x); \quad N \geq 3$. В этом примере, как и в примере 2, удалось получить точное аналитическое решение в виде многочлена. Это всегда возможно, если функция $K(x, y)$ и правая часть сами являются многочленами.

Рассмотренные методы решения одномерных уравнений типа потенциала могут быть распространены и на другие задачи. В частности, аналогично решаются задачи на собственные значения, приводящие к сингулярным или гиперсингулярным уравнениям или к уравнениям с логарифмической особенностью ядра. Ряд примеров таких задач, возникающих в электродинамике, содержится в книгах [12, 13].

Библиографический список

1. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979.

2. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.

3. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983.

4. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980.

5. Анго А. Математика для электро– и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977.

7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962.

8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.

10. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Исследование математических моделей микрополосковых линий // Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – С.176-198.

11. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.

12. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

13. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М.: ИПРЖР, 1996.